# Mathématiques 1

**MP**

**2019**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

**Notations et définitions**

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $n$ est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée $I_n$ et on désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice $A$, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, $\pi_A$ son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, $E$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie $n$ supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de $E$. On note $f$ un endomorphisme de $E$.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \dots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand $Q$ décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme $f$ de $E$ : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, $\chi_f$, $\pi_f$ et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que $f$ est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur $x_0$ dans $E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

## I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

***I.A –*** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Q 1.** Montrer que $M$ et $M^\top$ ont même spectre.

**Q 2.** Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si $M$ est diagonalisable.

***I.B – Matrices compagnons***

**Q 3.** Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Déterminer en fonction de $Q$ le polynôme caractéristique de $C_Q$.

**Q 4.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

***I.C – Endomorphismes cycliques***

**Q 5.** Montrer que $f$ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $C_Q$, où $Q$ est un polynôme unitaire de degré $n$.

**Q 6.** Soit $f$ un endomorphisme cyclique. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

**Q 7.** Montrer que si $f$ est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de $f$ est de degré $n$.

### *I.D – Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton*

**Q 8.** Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Montrer qu'il existe un entier $p$ strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0.$$

**Q 9.** Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par $f$.

**Q 10.** Montrer que : $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme $\chi_f$.

**Q 11.** Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

# II Étude des endomorphismes cycliques

### *II.A – Endomorphismes cycliques nilpotents*

Dans cette sous-partie, on suppose que $f$ est un endomorphisme nilpotent de $E$. On note $r$ le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

**Q 12.** Montrer que $f$ est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

***II.B*** – Dans cette sous-partie II.B, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que $f$ est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de $f$ sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les $\lambda_k$ sont les $p$ valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ et les $m_k$ de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

**Q 13.** Montrer que les sous-espaces vectoriels $F_k$ sont stables par $f$ et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\varphi_k$ l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel $F_k$,

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} F_k \to F_k, \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x. \end{array} \right.$$

**Q 14.** Justifier que $\varphi_k$ est un endomorphisme nilpotent de $F_k$.

On note $\nu_k$ le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

**Q 15.** Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$ ?

**Q 16.** Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

**Q 17.** Expliciter la dimension de $F_k$ pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de $E$ dans laquelle $f$ a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

**Q 18.** Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

**Q 19.** Justifier que $f$ est cyclique.

# III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de $f$ l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

**Q 20.** Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

### *III.A – Commutant d'un endomorphisme cyclique*

On suppose que $f$ est cyclique et on choisit un vecteur $x_0$ dans $E$ tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$.

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec $f$.

**Q 21.** Justifier l'existence de $\lambda_0$, $\lambda_1$, ..., $\lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0).$$

**Q 22.** Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

**Q 23.** Établir que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

### *III.B – Décomposition de Frobenius*

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

**Q 24.** Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de $E$ est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces vectoriels $F_i$ contient tous les autres.

On note $d$ le degré de $\pi_f$.

**Q 25.** Justifier l'existence d'un vecteur $x_1$ de $E$ tel que $(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$ est libre.

Pour tout $x$ non nul de $E$, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de $\pi_f$ et considérer les sous-espaces vectoriels $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_d)$.

**Q 26.** Montrer que $E_1$ est stable par $f$ et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note $\psi_1$ l'endomorphisme induit par $f$ sur le sous-espace vectoriel $E_1$,

$$\psi_1 : \left| \begin{array}{l} E_1 \to E_1, \\ x \mapsto f(x). \end{array} \right.$$

 

**Q 27.** Justifier que $\psi_1$ est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, ..., e_d)$ en une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $E$. Soit $\Phi$ la $d$-ième forme coordonnée qui à tout vecteur $x$ de $E$ associe sa coordonnée suivant $e_d$. On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

**Q 28.** Montrer que $F$ est stable par $f$ et que $E_1$ et $F$ sont en somme directe.

Soit $\Psi$ l'application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = \left(\Phi(f^i(x))\right)_{0\leqslant i\leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x))..., \Phi(f^{d-1}(x))).$$

**Q 29.** Montrer que $\Psi$ induit un isomorphisme entre $E_1$ et $\mathbb{K}^d$.

**Q 30.** Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

**Q 31.** En déduire qu'il existe $r$ sous-espaces vectoriels de $E$, notés $E_1, ..., E_r$, tous stables par $f$ tels que :

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ ;

— pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme $\psi_i$ induit par $f$ sur le sous-espace vectoriel $E_i$ est cyclique ;

— si on note $P_i$ le polynôme minimal de $\psi_i$, alors $P_{i+1}$ divise $P_i$ pour tout entier $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant r - 1$.

### *III.C – Commutant d'un endomorphisme quelconque*

**Q 32.** Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est supérieure ou égale à $n$.

**Q 33.** On suppose que $f$ est un endomorphisme tel que l'algèbre $\mathcal{C}(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que $f$ est cyclique.

# IV Endomorphismes orthocycliques

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $E$ est un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs $x$, $y$ de $E$ est noté $(x \mid y)$ et on désigne par $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de $E$.

On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est *orthocyclique* s'il existe une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $C_Q$ (matrice compagnon).

### *IV.A – Isométries vectorielles orthocycliques*

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

**Q 34.** Soit $f' \in \mathrm{O}(E)$ ayant même polynôme caractéristique que $f$. Montrer qu'il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E$ pour lesquelles la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de $f'$ dans $\mathcal{B}'$.

**Q 35.** En déduire que $f$ est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

### *IV.B – Endomorphismes nilpotents orthocycliques*

Soit $f$ un endomorphisme nilpotent de $E$.

**Q 36.** Montrer qu'il existe une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire inférieure.

**Q 37.** En déduire que $f$ est orthocyclique si et seulement si

$$f \text{ est de rang } n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in (\ker f)^{\perp}, \quad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

• • • FIN • • •